

総合問題

1 ※問題文は、教科書 142 ページを参照

指針 数列の和の最小

- (1) S_n の式を平方完成する。
 (2) $a_1=S_1$, $a_n=S_n-S_{n-1}$ ($n \geq 2$) であることを利用する。また、理由の説明については、 $a_n < 0$ であるとき、 n の増加にともなって S_n の値はどのように変化するのかに着目して考えるとよい。

解答 (1) $S_n = 3n^2 - 70n = 3\left(n^2 - \frac{70}{3}n\right)$

$$= 3\left(n - \frac{35}{3}\right)^2 - 3 \cdot \left(\frac{35}{3}\right)^2 = 3\left(n - \frac{35}{3}\right)^2 - \frac{1225}{3}$$

$\frac{35}{3}$ に最も近い自然数は 12 であるから、 S_n が最小になるときの自然数 n は

$$n = 12 \quad \text{答}$$

(2) 初項 a_1 は

$$a_1 = S_1 = 3 \cdot 1^2 - 70 \cdot 1 = -67 \quad \cdots \cdots \text{①}$$

$n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= (3n^2 - 70n) - \{3(n-1)^2 - 70(n-1)\} \end{aligned}$$

$$\text{すなわち} \quad a_n = 6n - 73$$

①より $a_1 = -67$ であるから、この式は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって、一般項は $a_n = 6n - 73$ 答

$a_n < 0$ とすると、 $6n - 73 < 0$ より

$$n < \frac{73}{6} = 12.1\cdots$$

よって、 $a_n < 0$ を満たす最大の自然数は $n=12$ であり、(1)で求めた n と一致する。 終

(理由)

上の結果より、 $n \leq 12$ では $a_n < 0$ 、 $n \geq 13$ では $a_n > 0$ となるから、初項から第 n 項までの和 S_n は、 $n \leq 12$ においては減少し、 $n \geq 13$ においては増加する。したがって、 S_n が最小になるのは $n=12$ のときになる。

すなわち、 $a_n < 0$ を満たす最大の自然数 n と、 S_n が最小になるときの自然数 n は一致する。 終

2 ※問題文は、教科書 142 ~ 143 ページを参照

指針 $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ の証明

- (1) [2] 各段の左から 1 番目の数は次のようになっている。

$$\begin{array}{ccccccc}
 n, & n-1, & n-2, & \cdots, & n-(i-1), & \cdots \\
 \text{1 段目} & \text{2 段目} & \text{3 段目} & & & i \text{ 段目}
 \end{array}$$

また、各段の数は右に1つ行くごとに1増える。

[3] 各段の左から1番目の数は常に n である。また、各段の数は右に1つ行くごとに1減る。

- (2) (1)より、同じ位置にある3つの数の和は一定値 s であるから、
(3つの三角形に含まれる数の総和)

$$=s \times (\text{1つの三角形に含まれる数の個数})$$

が成り立つ。

解答 (1) [1] 上から i 段目の数はすべて i であるから i 答

[2] 上から i 段目の左から1番目の数は $n-(i-1)$ であり、右に1つ行くごとに1増えるから、上から i 段目、左から j 番目の数は

$$n-(i-1)+(j-1)=n-i+j \quad \text{答}$$

[3] 上から i 段目の左から1番目の数は n であり、右に1つ行くごとに1減るから、上から i 段目、左から j 番目の数は

$$n-(j-1)=n-j+1 \quad \text{答}$$

以上から、3つの数の和 s は

$$s=i+(n-i+j)+(n-j+1)=2n+1 \quad \text{答}$$

- (2) (1)より、3つの三角形について、上から i 段目、左から j 番目の数の和 s は、その位置によらず $2n+1$ となる。

また、上から i 段目には i 個の数があるから、1つの三角形の中に含まれる数の個数は

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$$

よって、3つの三角形の中に含まれるすべての数の和は

$$s \times \frac{1}{2}n(n+1)$$

一方、1つの三角形の中に含まれる数の和は S_n で表されるから、3つの三角形の中に含まれるすべての数の和は $3S_n$ である。

$$\text{したがって} \quad 3S_n = s \times \frac{1}{2}n(n+1) \quad \cdots \cdots \text{①}$$

$$\text{答} \quad \frac{1}{2}n(n+1)$$

- (3) ①に(1)の結果を利用すると

$$\begin{aligned}
 S_n &= \frac{1}{3} \times s \times \frac{1}{2}n(n+1) = \frac{1}{3} \times (2n+1) \times \frac{1}{2}n(n+1) \\
 &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)
 \end{aligned}$$

したがって

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \quad \text{答}$$

3 ※問題文は、教科書 143 ページを参照

指針 正規分布の利用、母平均の推定

- (1) X を $N(0, 1)$ に従う確率変数 Z に変換し、 $P(X < 5000)$ に対応する確率を求める。
- (2) Y_1 については(1)と同様に行う。また、2つの福袋 A のそれぞれの定価合計を X_1, X_2 とすれば、 $Y_2 = X_1 + X_2$ となる。ここで、2つの福袋 A を大きさ 2 の無作為標本と考え、 $Y_2 = 2 \cdot \frac{X_1 + X_2}{2} = 2\bar{X}$ として、 $E(Y_2), \sigma(Y_2)$ を求め、 $N(0, 1)$ に従う確率変数に変換する。
- (3) 標本平均を $\bar{X}$ 、標本の標準偏差を S 、標本の大きさを n とすると、母平均の信頼度 95% の信頼区間は

$$\left[\bar{X} - 1.96 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + 1.96 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \right]$$

- (4) 信頼区間の幅とは、区間の両端の値の差であり、 $2 \times 1.96 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$ となる。

解答 (1) 確率変数 X が正規分布 $N(5600, 400^2)$ に従うとき、

$$Z = \frac{X - 5600}{400} \text{ は標準正規分布 } N(0, 1) \text{ に従う。}$$

$$X = 5000 \text{ のとき、} Z = \frac{5000 - 5600}{400} = -1.5 \text{ であるから、}$$

求める確率は

$$\begin{aligned} P(X < 5000) &= P(Z < -1.5) = 0.5 - p(1.5) \\ &= 0.5 - 0.4332 = 0.0668 \quad \text{答} \end{aligned}$$

- (2) 確率変数 Y_1 が正規分布 $N(11200, 800^2)$ に従うとき、

$$Z_1 = \frac{Y_1 - 11200}{800} \text{ は標準正規分布 } N(0, 1) \text{ に従う。}$$

$$Y_1 = 10000 \text{ のとき、} Z_1 = \frac{10000 - 11200}{800} = -1.5 \text{ であるから、}$$

$$(1) \text{と同様にして } P(Y_1 < 10000) = 0.0668 \quad \text{答}$$

次に、無作為抽出された 2 つの福袋 A の定価合計をそれぞれ X_1, X_2 とすると、 $Y_2 = X_1 + X_2 \cdots \cdots \textcircled{1}$

ここで、2 つの福袋 A は、福袋 A の母集団から抽出された大きさ 2 の無

$$\text{作為標本であるから、} \bar{X} = \frac{X_1 + X_2}{2} \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\text{は正規分布 } N\left(5600, \frac{400^2}{2}\right) \text{ に従い、} E(\bar{X}) = 5600, \sigma(\bar{X}) = \frac{400}{\sqrt{2}}$$

よって, ①, ②より, $Y_2 = 2 \cdot \frac{X_1 + X_2}{2} = 2\bar{X}$ であるから, Y_2 も正規分布に

従い, $E(Y_2) = 2E(\bar{X}) = 11200$, $\sigma(Y_2) = 2\sigma(\bar{X}) = 400\sqrt{2}$ であるから,

$Z_2 = \frac{Y_2 - 11200}{400\sqrt{2}}$ は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う。

$$Y_2 = 10000 \text{ のとき, } Z_2 = \frac{10000 - 11200}{400\sqrt{2}} = -\frac{3\sqrt{2}}{2} \doteq -2.12$$

であるから, 求める確率は

$$\begin{aligned} P(Y_2 < 10000) &= P(Z_2 < -2.12) = P(Z_2 > 2.12) \\ &= 0.5 - p(2.12) = 0.5 - 0.4830 \\ &= 0.0170 \quad \text{答} \end{aligned}$$

- (3) 標本の平均値は $\bar{X} = 5600$, 標本の標準偏差は $S = 400$, 標本の大きさは $n = 100$ であるから

$$1.96 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{400}{\sqrt{100}} = 78.4$$

よって, 求める信頼区間は

$$[5600 - 78.4, 5600 + 78.4]$$

すなわち $[5521.6, 5678.4]$

したがって $[5522, 5678]$ ただし, 単位は円 答

- (4) 標本の大きさを n とすると, 信頼度 95% の信頼区間の幅は

$$2 \times 1.96 \cdot \frac{400}{\sqrt{n}}$$

$$2 \times 1.96 \cdot \frac{400}{\sqrt{n}} \leq 100 \text{ より } \sqrt{n} \geq 15.68$$

よって $n \geq 245.8624$

したがって, 246 以上 にすればよい。 答